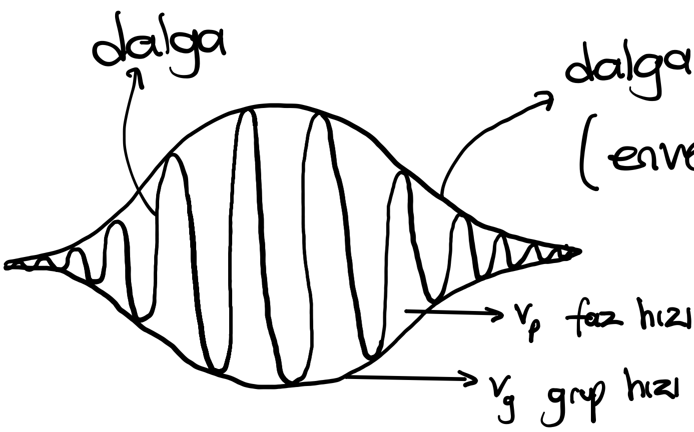
DALGA FONKSİYONUNUN HEISENBERG BELİRSİZLİK İLKESİNİ DOĞURMASI

Dalga fonksiyonundan Heisenber belirsizlik ilkesine gitmek için sinüsoit ve serbest dalga fonksiyonunu incelememiz gerekir. Bundan önce dalga fonksiyonunun birkaç özelliğini kavramak gerekir:

$\Psi(\vec{r},t)$ fonksiyonu aynı $\vec{E}(\vec{r},t)$ fonksiyonu gibi üst üste binme prensibi gösterir. Yani iki dalgayı toplamak için dalga fonksiyonlarını toplayıp $\Psi_1 + \Psi_2$ sonucunu elde ederiz. Bu olguyu çift yarık deneyinde şu şekilde izah etmiştik:

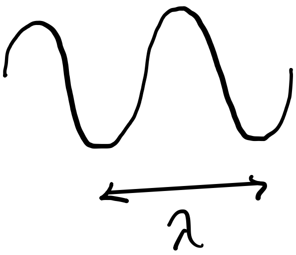
Geçilen delik ayırt edildiğinde (ayırt etmek için bir ışık kaynağı kullanmıştık) oluşan son olasılık yoğunluğu $|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2$ iken (parçacık özelliği) elektronlar gözlenlenmediğinde dalga özelliği gösterip birbirlerinin üstüne binerek enterferans gerçekleştirmişlerdi. Bunun sonucu olarak $P_{12}(\vec{r},t)$'yi $|\Psi_1(\vec{r},t) + \Psi_2(\vec{r},t)|$ ile bulmuştuk. Bunu göz önünde bulundurarak sinüsoit dalga fonksiyonunun incelemesine geçebiliriz.

Öncelikle sinüsoit dalga denklemini çizelim.



$$\Psi(x,t) = \sin\Big[\overbrace{2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right)}^{\text{faz}}\Big]$$

Faz bize adından da anlaşıldığı gibi faz hakkında bilgi verecek. İçinde x olduğu için faz ifadesinin zamana göre türevini alırsak faz hızını buluruz. Sabit bir faz sağlamak için x her λ ilerlediğinde (1 dalga boyu), t $\frac{1}{\nu}$ (1 dalga oluşması için geçen süre) artar. Böyle gerçekleşen bir ilerlemenin hızının sabit olacağı bir nokta seçilerek gözlenlenebilir. Bu faza φ_0 diyecek olursak;



$$\frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi\nu = \underbrace{kx - \omega t} = \varphi_0 \Longrightarrow x = \frac{\varphi_0}{k} + \frac{\omega}{k}t \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v_p$$

$$2\pi \cdot \nu = \omega$$

1 rotasyon = 2π radyan

frekans = $\frac{\text{1 saniyede yapılan rotasyon}}{\text{1 saniye}}$

açısal hız = $\frac{\text{taranan radyan}}{\text{taramak için geçen süre}}$

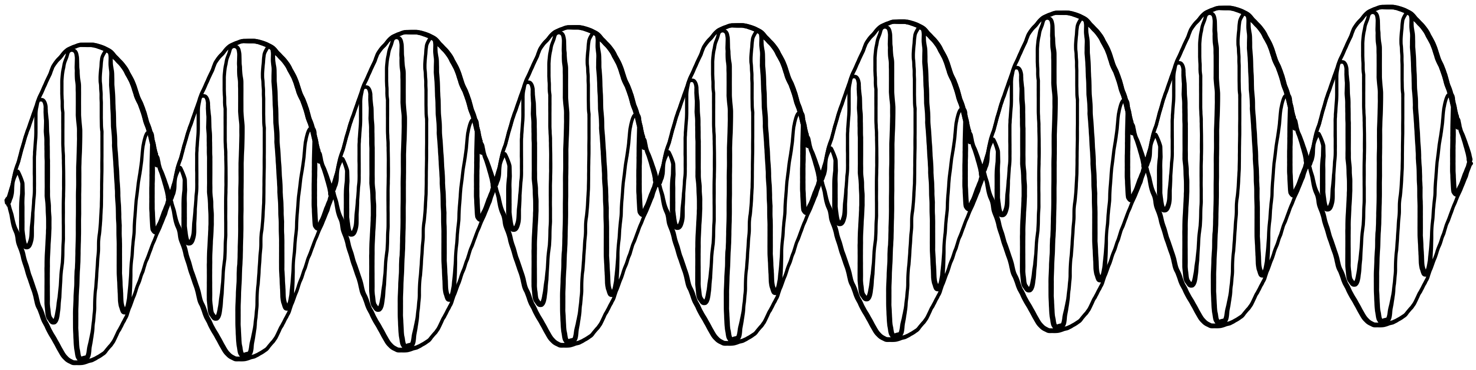
dalganın karakteristiğinden $\frac{2\pi}{\lambda} = k$ (wave number)

Sabit faza sahip bir dalganın faz hızı. Bunu birazdan kullanacağız

Üst üste binmiş iki dalganın fonksiyonunu önceki bil-
gilerimizden yararlanarak yazalım.

$$\Psi(x,t) = \sin(k_1 x - w_1 t) + \sin(k_2 x - w_2 t)$$

$$= \underbrace{2\cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}x - \frac{w_1-w_2}{2}t\right)}_{\text{zarfın şekli}} \underbrace{\sin\left(\frac{k_1+k_2}{2}x - \frac{w_1+w_2}{2}t\right)}_{\text{dalganın şekli}}$$



$k_1 = k_2 + dk$
$w_1 = w_2 + dw$ alırsak

ortalamalarına k ve w dedim

$$2\cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}x - \frac{w_1-w_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{k_1+k_2}{2}x - \frac{w_1+w_2}{2}t\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{dk}{2}x - \frac{dw}{2}t\right)}\sin\left(kx - wt\right)$$

$\sin(kx-wt)$ dalganın şekliydi ve $\frac{w}{k}$ faz hızıydı. O halde şekli $\cos\left(\frac{dk}{2}x - \frac{dw}{2}t\right)$ olan zarfın hızı $\frac{dw}{dk}$ olmalı (bunu diyebildik çünkü sin ve cos fonksiyonlarının yarattığı şekil aynıdır. $\cos\left(\frac{dk}{2}x - \frac{dw}{2}t\right)$ fonksiyonu rahatlıkla $\sin\left[\left(\frac{dk}{2}x - \frac{dw}{2}t\right) + \Phi\right]$ şeklinde yazılabilir)

eşitliği sağlayan bir sayı

$$\frac{w}{k} = v_p \qquad \frac{dw}{dk} = v_g$$

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{E}{h} = \frac{E}{\hbar}$$

$h\nu = E$ olduğunu fotoelektrik olgu deneyinde görmüştük.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi p}{h} = \frac{p}{\hbar}$$

$\lambda = \frac{h}{p}$ olduğunu de Broglie hipotezinde görmüştük

Bu iki eşitliği serbest parçacıkların dalga fonksiyonu incelerken kullanacağız.

Serbest parçacığın dalga fonksiyonu : $\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$

p'deki belirsizlik yani Δp nedir?

Üst üste binme prensibi kullanılarak çok sayıda dalganın oluşturacağı fonksiyon şu toplam olarak yazılabilir:

$$\sum A_k e^{i(kx-\omega t)} = \sum_k A_k\left[\cos(kx-\omega t) + i\sin(kx-\omega t)\right]$$

A_k yazmamızın sebebi şöyle izah edilebilir. $\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$ olduğu için $\Psi(x,t)$ yalnızca x ve t'nin bir fonksiyonudur. Bu yüzden x ve t değişmeden k değeri değişecek olursa fonksiyon k'ya bağlı olmadığı için sonuç değişmemelidir.

$\omega = \frac{E}{\hbar}$ ve $k = \frac{p}{\hbar}$ olduğunu bulmuştuk.

$$\omega = \frac{p^2}{2m\hbar} = \frac{k^2\hbar}{2m} \quad \left(E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m}\right)$$

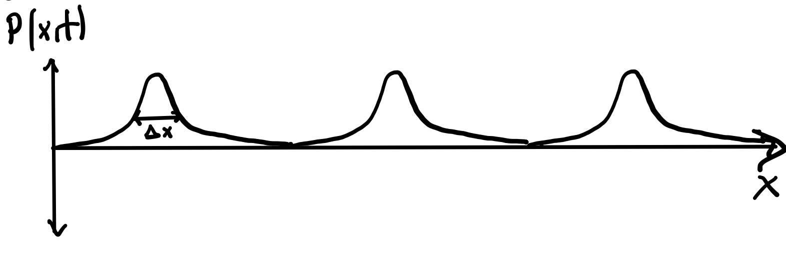
x'teki belirsizlik yani Δx nedir?

Üst üste binme prensibi kullanılarak çok sayıda dalganın oluşturacağı fonksiyon şu toplam olarak yazılabilir:

$$\sum A_k e^{i(kx-\omega t)} = \sum_k A_k\left[\cos(kx-\omega t) + i\sin(kx-\omega t)\right]$$

dalga fonksiyonunun öncelikle reel kısmını çizersek grafiği çok ufak bir sapmayla çizmiş oluruz çünkü imajiner kısım da aynı yerde aynı tümseleri verecektir.

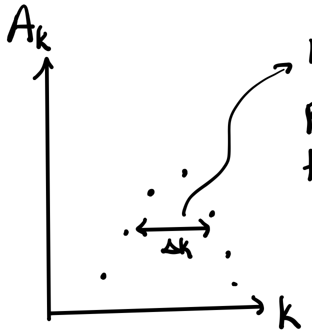
$P(x,t) = |\Psi(x,t)|^2 = |A|^2$ olduğunu çift yarık deneyinde görmüştük.



$$\Psi(x,t) = A e^{i\left(kx - \frac{k^2\hbar}{2m}t\right)}$$

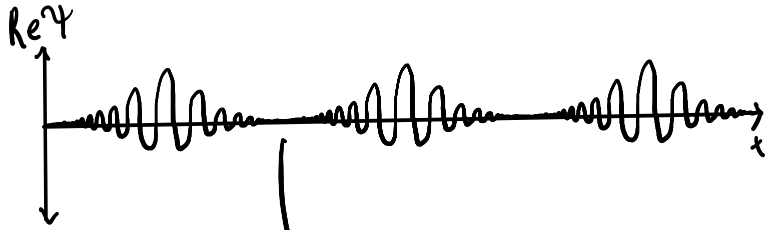
↓

Ψ x ve t'ye bağlı bir fonksiyondur ancak görüldüğü üzere içinde farklı değerler alabilen bir k değeri de bulunmaktadır. Ψ'nin x ve t'ye bağımlı ancak k'dan bağımsız olması için x ve t sabitken k değiştiğinde Ψ'nin sabit kalmasını sağlayacak bir A değeri olmalıdır. Bu nedenle k ile birlikte değişen A değerini A_k olarak yazıyoruz. Sonuç olarak her k değerine düşen bir A_k değeri vardır. Bu değerleri grafiğe döktüğümüzde

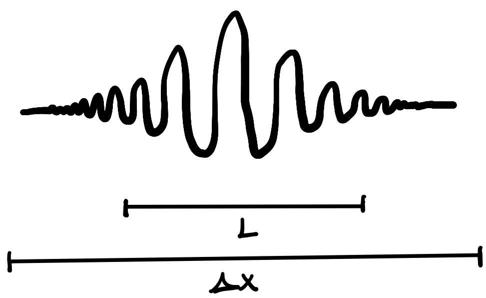


k'da oluşacak belirsizlik p'deki belirsizlikle doğru orantılıdır çünkü $k = \frac{p}{\hbar} \Rightarrow \Delta k = \frac{\Delta p}{\hbar}$

$(\Delta k \simeq dk)$



Dalga boyları birbirine eşit olmadığı için matematiksel hesap zorlaşıyor ve saymak gerekiyor. Ancak parçacığın bulunma ihtimalinin 0'a yaklaştığı bölgelerde dalgaları saymak zorlaşıyor. 1 dalga sapma ihtimali oluşuyor.



$\bar{\lambda} = \frac{L}{n}$

$\bar{\lambda}$: ortalama dalga boyu

n: dalga sayısı

Sapmayı hesaplamak için yapmamız gereken:

$$\Delta\lambda = \frac{L}{n} - \frac{L}{n+1} = \frac{L}{n}\left[1 - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\right]$$

bir grup çok fazla dalga içerdiği için n büyük bir değer. O halde $\frac{1}{n}$ çok küçük olduğu için $(1+\varepsilon)^{\alpha} \simeq 1 + \alpha\varepsilon$ yaklaşımını kullanarak $\Delta\lambda \simeq \frac{L}{n^2} = \frac{\lambda^2}{L}$

$(\Delta\lambda = d\lambda)$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{dk}{d\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda^2} \Longrightarrow \frac{|dk|}{2\pi} = \frac{|d\lambda|}{\lambda^2} \Rightarrow \frac{\Delta k}{2\pi} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{L}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} L = \frac{\Delta k}{2\pi} L = \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta p}{2\pi\hbar} \Longrightarrow \Delta x \Delta p \simeq 4\pi\hbar$$

böylece Δx ve Δp'nin birbirine ters orantılı olduğunu, yani birinde belirsizliğin azalmasının öbüründe belirsizliğin artmasına sebep olacağını kanıtladık. Buna Heisenberg belirsizlik ilkesi denir. Eğer yaptığımız yaklaşık hesapları minimalize edip daha ayrıntılı ve dikkatli işlem yapsaydık $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ sonucunu elde ederdik.

$\Delta x \to 0 \quad \Delta p \to \infty$