Zamandan Bağımsız
Schrödinger Denklemi: $\frac{-\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\Psi(x,y,z)+V(x,y,z)\Psi(x,y,z)=E\Psi(x,y,z)$

$V(x,y,z)=A(x)+B(y,z)$ varsayıp $\Psi(x,y,z)=F(x)L(y,z)$ deneyelim.

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]FL+\left[A(x)+B(y,z)\right]FG=EFL \Longrightarrow \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+B(y,z)\right]FL=\left(\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-A(x)+E\right)FL$$

denklemin karşı tarafına

Seperation of variables

$$\underbrace{\frac{1}{L}\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+B(y,z)\right]L}_{y,z \text{ cinsinden bir ifade}}=\underbrace{\frac{1}{F}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-A(x)+E\right)F}_{x \text{ cinsinden bir ifade}}=N$$

olmak üzere atayarak kendimize yazım kolaylığı sağlarız.

$\Downarrow$ (− ile çarpıp E'yi karşıya attım)

$$\underbrace{\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+B(y,z)\right]L(y,z)=NL(y,z)}_{y,z \text{ cinsinden yazılabilir}}, \quad \underbrace{\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+A(x)\right)F(x)=(E-N)F(x)}_{x \text{ cinsinden yazılabilir.}}$$

O halde Schrödinger Denklemi $\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial a^2}+V(a)\right)\Psi(a)=E\Psi(a)$ halinde

olduğuna göre $N=E_{yz}$, $E-N=E_x$, $E=E_x+E_{yz}$

Sonuç: $V(x,y,z)$ ifadesi $A(x)+B(y,z)$ şeklinde yazılabilirse $\Psi(x,y,z)=F(x)L(y,z)$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $\Psi(x,y,z)$'yi $F(x)G(y)H(z)$ şeklinde yazabilirsek de basit bir substitution ile $A(x)B(y,z)$ şeklinde yazmış

oluruz. $\Psi(x,y,z) = \underbrace{F(x)}_{A(x)}\underbrace{G(y)H(z)}_{B(y,z)}$

Zamandan Bağımsız Schrödinger Denklemi: $\frac{-\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\Psi(x,y,z) + V(x,y,z)\Psi(x,y,z) = E\Psi(x,y,z)$

$V(x,y,z) = U(x) + W(y) + Y(z)$ için $\Psi(x,y,z) = F(x)G(y)H(z)$

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]FG + \left[U(x)+W(y)+Y(z)\right]FG = EFG \Longrightarrow \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+U(x)+W(y)\right]FGH = \left(\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} - Y(z) + E\right)FGH$$

denklemin karşı tarafına

Seperation of variables

$$\star \quad \frac{1}{FG}\underbrace{\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+U(x)+W(y)\right]FG}_{x,y \text{ cinsinden ifade}} = \frac{1}{H}\underbrace{\left(\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} - Y(z)+E\right)H}_{z \text{ cinsinden ifade}} \equiv N$$

olmak üzere atayarak kendimize yazım kolaylığı sağlarız.

Seperation of variables yapmadan önceki ifade

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+U(x)+W(y)\right]FG = FGN \Longrightarrow \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+U(x)\right]FG = \left[\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - W(y)+N\right]FG$$

denklemin karşı tarafına

Seperation of variables

$$\frac{1}{F}\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+U(x)\right]F=\frac{1}{G}\left[\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-W(y)+N\right]G \equiv M$$

M olmak üzere atayarak kendimize yazım kolaylığı sağlarız.

$$\underbrace{\frac{1}{F}\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+U(x)\right]}_{x \text{ cinsinden bir ifade}} \qquad \underbrace{\frac{1}{G}\left[\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-W(y)+N\right]}_{y \text{ cinsinden bir ifade}}$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+U(x)\right]F(x)=\underbrace{M}_{x \text{ cinsinden yazılabilir}}F(x),\quad \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+W(y)\right]G(y)=\underbrace{(N-M)}_{y \text{ cinsinden yazılabilir}}G(y),\quad \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+Y(z)\right)H(z)=\underbrace{(E-N)}_{z \text{ cinsinden yazılabilir}}H(z)$$

O halde Schrödinger Denklemi $\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial a^2}+V(a)\right)\Psi(a)=E\Psi(a)$ halinde

olduğuna göre $M=E_x$, $N-M=E_y$, $E-N=E_z$, $E=E_x+E_y+E_z$