1)

$$\Psi = a_{22}(T-T_0)m^2 + a_4 m^4 + a_6 m^6 - Hm$$

a) $H=0$, $a_4 = -|a_4|$, $a_6 = |a_6|$ verilmiş. O halde;

$$\Psi = a_{22}(T-T_0)m^2 - |a_4|m^4 + |a_6|m^6$$

Birinci tür bir faz geçişi olabilmesi için $\frac{\partial \Psi}{\partial m} = 0$'ın en az 2 ayrı çözümünün olması (μ_1 ve μ_2 diyelim) ve $\Psi(\mu_1) = \Psi(\mu_2)$ olması gerekiyor. Ψ fonksiyonu çift bir fonksiyon olduğu için Bragg-Williams grafiği $\frac{\Psi}{NkT}$ eksenine göre simetrik. Dolayısıyla eğer ki pozitif bir lokal minimum varsa simetriğinde aynı $\frac{\Psi}{NkT}$ değerine sahip bir lokal minimum daha var. Herhangi birisi daha minimum kalmayacağı için bu iki nokta arasında faz geçişi yaşanmaz. Bu da demek oluyor ki faz geçişi $\Psi = 0$ iken gerçekleşecek.

$$\Psi = a_{22}(T-T_0)\mu^2 - |a_4|\mu^4 + |a_6|\mu^6 = 0$$

$$\left.\frac{\partial \Psi}{\partial m}\right)_{m=\mu} = 2a_{22}(T-T_0)\mu - 4|a_4|\mu^3 + 6|a_6|\mu^5 = 0$$

$$-2a_{22}(T-T_0)\mu^2 + 2|a_4|\mu^4 - 2|a_6|\mu^6 = 0$$

$$+\ 2a_{22}(T-T_0)\mu^2 - 4|a_4|\mu^4 + 6|a_6|\mu^6 = 0$$

$$\underbrace{-2|a_4|\mu^4 + 4|a_6|\mu^6 = 0 = 2\mu^4(2|a_6|\mu^2 - |a_4|)}$$

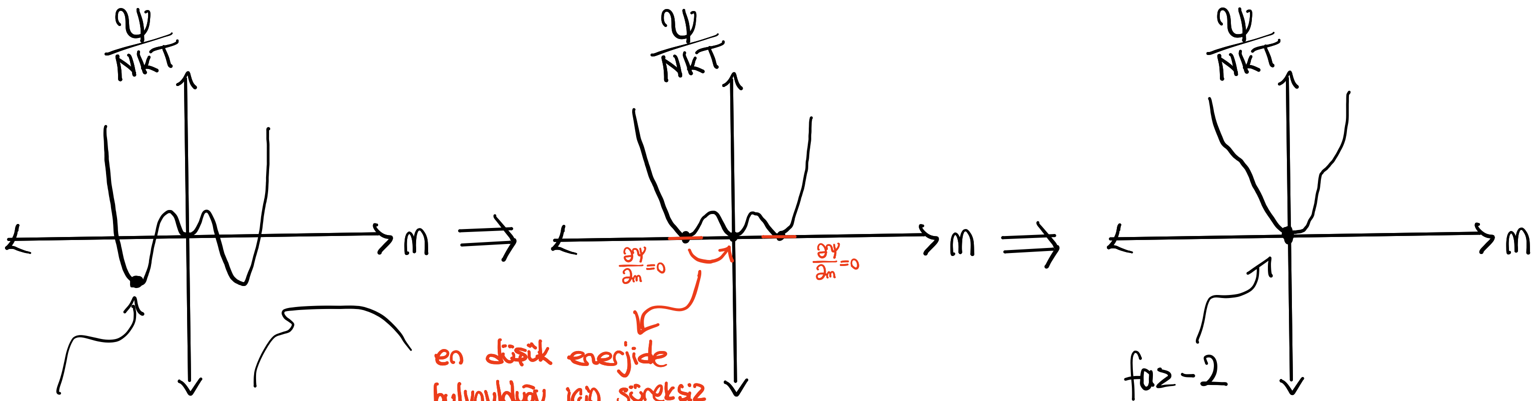
$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = -\left(\frac{|a_4|}{2|a_6|}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \mu_3 = \left(\frac{|a_4|}{2|a_6|}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$-4a_{22}(T-T_0)M^2+4|a_4|M^4-4|a_6|M^6=0$$

$$+\;2a_{22}(T-T_0)M^2-4|a_4|M^4+6|a_6|M^6=0$$

$$-2a_{22}(T-T_0)M^2+2|a_6|M^6=0=2M^2\left(|a_6|M^4-a_2(T-T_0)\right)$$

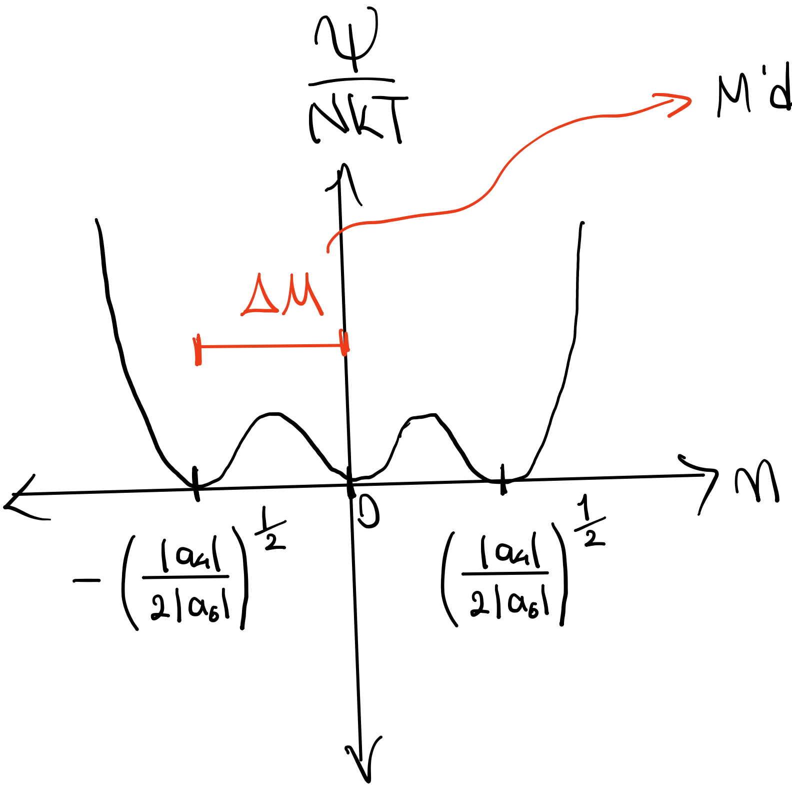
$$T=\frac{|a_6|M^4}{a_{22}}+T_0=\frac{|a_4|}{4|a_6|a_{22}}+T_0=T_{transition}$$



sistem buradan başlamış olsun (faz-1)

en düşük enerjide bulunulduğu için süreksiz bir atlama olacak. Bu bir birinci tür faz geçişidir.

faz-2



M'deki süreksizlik $=\left(\frac{|a_4|}{2|a_6|}\right)^{\frac{1}{2}}$

b) $H=0$ ise (fonksiyon hala çiftse) faz geçişinin $\Psi=0$'da gerçekleşeceğini bulmuştuk. $T=T_0$ ise m^2'li terim de yok olur. Bu şartlar altında eğer $\frac{\partial\Psi}{\partial m}=0$'ın birden fazla sonucu varsa bir sıcaklık değişiminde minimum noktası $(0,0)$'a sıçrayacaktır. Bu durum birinci tür bir faz geçişi gerçekleşeceği anlamına gelir. Eğer tek sonuç $m=0$'da ise minimum noktalar $\Psi=0$'da bir araya geliyor demektir. Bu durum ise ikinci tür bir faz geçişinin yaşandığını gösterir. Bu ikisinin birbirinden ayrıldığı nokta kritik noktadır. O halde bu noktayı belirlemek için ilk türeve bakalım.

$$\Psi = a_4 m^4 + a_6 m^6$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial m} = 4a_4 m^3 + 6a_6 m^5 = 2m^3(2a_4 + 3a_6 m^2)$$

a_6'nın tanım gereği pozitif olması gerekiyor (yoksa sistemin minimum noktası her sıcaklıkta $-\infty$'da olur). O halde $a_4 > 0$ için tek sonuç $m=0$ noktasıdır. $a_4 < 0$ için ise 3 farklı sonuç vardır.

$T=T_0,\ H=0,\ a_4>0 \longrightarrow$ faz geçişi 2. tür oluyor.
$T=T_0,\ H=0,\ a_4>0 \longrightarrow$ faz geçişi 1. tür oluyor.

O halde $T=T_0,\ H=0,\ a_4=0$ noktası kritik noktadır.

a_n katsayılarının bağlılıklarını bulmak için Ψ fonksiyonunun m'ye göre simetrisini kullanabiliriz (m tanımı değiştiğinde işaret değişmemeli). $H_c=0$, $L_c=0$ ve $T_c=T_0$ olduğunu da bildiğimize göre $n=2,6$ için;

$$a_n = a_{n1}(H-H_c)+a_{n2}(T-T_c)+a_{n3}(L-L_c)\ldots = a_{n1}H + a_{n2}(T-T_0)+a_{n3}L \ldots$$

$n=4$ için;

$$a_4 = \underbrace{c}_{\text{pozitif}} + \text{aynı küçük değerler} \simeq c$$

Yaptığımız açılımlar kritik nokta etrafında olduğu için $\frac{\partial^4\Psi}{\partial m^4}$ pozitif olmalı. Dolayısıyla c bir sabittir. $a_4 \simeq c$ yaklaşımı yapıyoruz.

$\Psi(m,H,T,L)=\Psi(-m,-H,T,-L)$ sağlanması gerektiği için m çarpanının üssü çift olan a_n terimlerinin aynı kalması, tek olan terimlerinin işaret değiştirmesi gerekiyor. O halde;

$$\left.\begin{aligned} &a_{21}=a_{23}=0 \quad (\text{verilmiş}) \\ &a_{61}=a_{63}=0 \end{aligned}\right\} a_n\text{'ler yalnızca } T\text{'ye bağlı}$$

$a_2 \equiv a_{22}(T-T_0)$ tanımlayalım

β Üsteli:

Sıcaklık yönünden kritik noktaya yaklaşacaksak $\longrightarrow H=0$

$$\Psi = a_2 m^2 + c m^4 + a_6 m^6$$

$$\left.\frac{\partial\Psi}{\partial m}\right|_{m=M} = 2a_2 M + 4cM^3 + 6a_6 M^5 = 2M(a_2 + 2cM^2 + 3a_6 M^4) = 0$$

$M=0$

$$M=\left(\frac{-a_4 \pm \sqrt{c^2-3a_2a_6}}{a_2}\right)^{\frac{1}{2}} \sim \left(\frac{T_c-T}{T_c}\right)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow \beta=\frac{1}{2}$$

δ Üsteli:

Manyetik alan yönünden kritik noktaya yaklaşacaksak $\longrightarrow$ $a_2=0$, $a_6=0$

$$\Psi = cm^4 - Hm$$

$$\left.\frac{\partial \Psi}{\partial m}\right|_{m=M} = 4cM^3 - H = 0 \Longrightarrow M^3 \sim H \Longrightarrow \delta = 3$$

γ Üsteli:

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} \sim \frac{\partial H^{\frac{1}{3}}}{\partial H} \sim H^{\frac{-2}{3}} \sim M^{-2} \sim \left(\frac{T_c-T}{T_c}\right)^{-1} \Longrightarrow \gamma = 1$$

α Üsteli:

Bazı bildiğimiz eşitlikleri yazalım:

$$\frac{F}{N} = \Psi(M), \quad S = -\frac{1}{N}\frac{\partial F}{\partial T}, \quad C = T\frac{\partial S}{\partial T} \quad \text{O halde;}$$

$$C = -\frac{T}{N}\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \sim \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2}$$

Biliyoruz ki Ψ fonksiyonu T ile orantılı çünkü $a_{22}(T-T_c)$, $a_{62}(T-T_c)$ gibi toplamlardan oluşuyor. Dolayısıyla ikinci türevinin T ile orantısı kalmaz.

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} \sim C \sim (T-T_c)^0 \Longrightarrow 2-\alpha=0 \Longrightarrow 2=\alpha$$

2) $-\beta\mathcal{H}_N = \dfrac{J}{2N} \underbrace{\sum_{\langle ij \rangle}^{N} s_i s_j}_{} + H \underbrace{\sum_{N}^{N} s_i}_{}$

bir spin tüm diğer spinlerle eşit etkileştiği için

$\frac{1}{2}(N_+^2 + N_-^2) \rightarrow$ pozitif etkileşim olur.

$N_+N_- \rightarrow$ negatif etkileşim olur.

her etkileşim 2 defa sayıldığı için

pozitif spin toplamı $\rightarrow N_+$

negatif spin toplamı $\rightarrow N_-$

$$-\beta\mathcal{H}_N = \frac{J}{N}\left(\frac{1}{2}\left[N_+^2 + N_-^2\right] - N_+N_-\right) + H(N_+ - N_-)$$

$N_- = N - N_+$ ve $\mu = \langle s_i \rangle = \dfrac{N_+\cdot(+1) + N_-\cdot(-1)}{N} = \dfrac{N_+ - N_-}{N}$ kullanırsak

$$-\beta\mathcal{H}_N = \frac{JN\mu^2}{2} + HN\mu = N\left(\frac{J\mu^2}{4} + H\mu\right) \text{ elde ederiz}$$

$\dfrac{N!}{N_+!\,N_-!}$ ifadesini Stirling yaklaşımını $(x! \simeq x^x e^{-x})$ kullanarak şu şekilde

ifade edebiliriz:

$$\frac{N!}{N_+!\,N_-!} \simeq e^{N\ln N - N_+\ln N_+ - N_-\ln N_-} = e^{N\left[\ln 2 - \frac{\mu+1}{2}\ln(\mu+1) - \frac{1-\mu}{2}\ln(1-\mu)\right]}$$

$$Z_N = \sum_{N_+}^{N} e^{N\left[\ln 2 - \frac{\mu+1}{2}\ln(\mu+1) - \frac{1-\mu}{2}\ln(1-\mu)\right]} e^{N\left(\frac{J\mu^2}{2} + H\mu\right)} = \sum_{N_+}^{N} e^{N\phi}$$

$$\phi = \ln 2 - \frac{\mu+1}{2}\ln(\mu+1) - \frac{1-\mu}{2}\ln(1-\mu) + \frac{J\mu^2}{2} + H\mu$$

$\frac{\ln Z}{N}$'e bir değer bulabilmek için "squeeze theorem" i kullanabiliriz. Burada şunu biliyoruz ki Z_N değeri $e^{N\Phi_{max}}$'tan büyük olmalı çünkü toplamımızda bazı diğer elemanlar da var. aynı şekilde $Ne^{N\Phi_{max}}$ terimi de Z_N değerinden büyük olmalı çünkü eğer her terim $e^{N\Phi_{max}}$ büyüklüğünde olsaydı ancak bu sonuca varılabilirdi. Yaptığımız yaklaşık hesaplardan dolayı eşitlik durumlarını da hesaba katarsak;

$$e^{N\Phi_{max}} \leq Z_N \leq Ne^{N\Phi_{max}} \Longrightarrow N\Phi_{max} \leq \ln Z_N \leq \ln N + N\Phi_{max} \Longrightarrow \Phi_{max} \leq \frac{\ln Z_N}{N} \leq \frac{\ln N}{N} + \Phi_{max}$$

Termodinamik limitte $N \to \infty$ olduğuna göre

$$\lim_{N\to\infty} \Phi_{max} \leq \lim_{N\to\infty} \frac{\ln Z_N}{N} \leq \lim_{N\to\infty} \frac{\ln N}{N} + \Phi_{max} \Longrightarrow \lim_{N\to\infty} \Phi_{max} \leq \lim_{N\to\infty} \frac{\ln Z_N}{N} \leq \lim_{N\to\infty} \Phi_{max}$$

O halde $\Phi_{max} = \frac{\ln Z_N}{N}$ Bu da demek oluyor ki termodinamik limitte $\frac{\ln Z_N}{N}$ değeri toplamdaki maksimum terimden çıkarılabilir. Dolayısıyla Landau Teorisi burada geçerlidir.

Φ_{max}'ı elde etmek için;

$$\frac{d\Phi}{dM} = JM + H - \operatorname{arctanh}(M) = 0 \Longrightarrow M = \tanh(JM+H) \text{ olduğunda } \Phi = \Phi_{max}$$

$$\Psi = kT\Phi_{max} = kT\left(\ln 2 - \frac{M+1}{2}\ln(M+1) - \frac{1-M}{2}\ln(1-M) + \frac{JM^2}{2} + HM\right)$$

3)

$$-\beta\mathcal{H}_N = J\sum_{\langle ij\rangle}\vec{S}_i\cdot\vec{S}_j + \vec{H}\cdot\sum_i \vec{S}_i$$

Burada $\vec{S}_i \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere bir 3 bileşenli birim vektör ve $|\vec{S}_i| = 1$.

$\vec{M} = \langle \vec{S}_i \rangle$ olduğuna göre ortalama alan yaklaşımı bize der ki;

$$-\beta\mathcal{H}_1 = \vec{S}_1\cdot\left(Jq\vec{M} + \vec{H}\right)$$

Eğer spinlerin ortalama yönünü bulduğumuzu varsayıp o yönü $\hat{z}$ olarak tanımlarsak $\vec{M} = M\hat{z}$, $\vec{H} = H\hat{z}$ olacaktır. O halde dot product'tan;

$$-\beta\mathcal{H}_1 = |\vec{S}_i|\,|Jq\vec{M}+\vec{H}|\cos\theta_i = \cos\theta_i\,(JqM+H) \qquad (\Omega = \cos\theta)$$

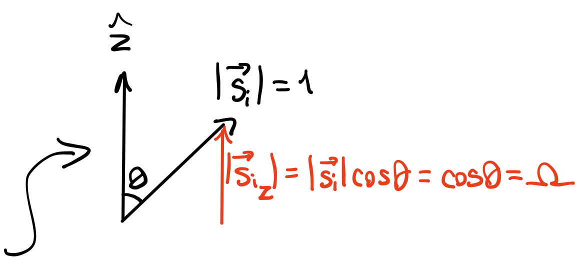
$$Z_N = \int_0^{2\pi}\prod_i^N e^{(JqM+H)\cos\theta_i}\,d\theta_i = \left[\int_0^{2\pi} e^{(JqM+H)\cos\theta}\,d\theta\right]^N = \left[2\pi\int_{-1}^{+1} e^{(JqM+H)\cos\theta}\,d(\cos\theta)\right]^N = \left[\frac{4\pi\sinh(JqM+H)}{(JqM+H)}\right]^N$$

$$p(\Omega) = \frac{e^{-\beta\mathcal{H}_1}}{\int e^{-\beta\mathcal{H}}\,d\Omega} = \frac{e^{(JqM+H)\cos\theta}}{Z} = \frac{(JqM+H)^N\,e^{(JqM+H)\Omega}}{\left[4\pi\sinh(JqM+H)\right]^N}$$

$$\int p(\Omega)\,d\Omega = 2\pi\int_{-1}^{+1}\frac{(JqM+H)^N\,e^{(JqM+H)\Omega}}{\left[4\pi\sinh(JqM+H)\right]^N}\,d\Omega = \left[\frac{JqM+H}{4\pi\sinh(JqM+H)}\right]^{N-1} = 1$$

$$\vec{M} = M\hat{z} = \langle\vec{S}_i\rangle = \frac{2\pi\int_{-1}^{+1}\vec{S}_i\,e^{(JqM+H)\Omega}\,d\Omega}{Z}$$

Sonucun kendi tanımladığımız $\hat{z}$ yönünde olduğunu bildiğimiz için $\hat{x}, \hat{y}$ yönlerinin sıfırlanacağını biliyoruz. $\hat{z}$ bileşenini de şöyle integre edebiliriz:



Integration by parts

$$M = \frac{2\pi \int_{-1}^{+1} \Omega e^{(JqM+H)\Omega} d\Omega}{z} = \left[\coth(JqM+H) + \frac{1}{(JqM+H)}\right]\left[\frac{JqM+H}{4\pi \sinh(JqM+H)}\right]^{N-1}$$

$$= \left[\coth(JqM+H) + \frac{1}{(JqM+H)}\right]$$

$JqM+H = A$ olmak üzere Langevin fonksiyonunu kullanabiliriz.

Küçük A değerleri için $L(A) = \frac{A}{3} - \frac{A^3}{45} + \frac{2A^5}{945} \cdots \simeq \frac{A}{3}$

Büyük A değerleri için $L(A) = 1$ $\longrightarrow$ Düşük sıcaklıklarda spinlerin alligned olduğunu açıklıyor.

$M = \frac{JqM+H}{3}$ eşitliğini elde ettiğimize göre kritik sıcaklığı bulabiliriz. Kritik sıcaklık iki ifadenin eğimlerinin birbirine eşit olduğu anda olur.

$$\frac{\partial M}{\partial M} = \frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{JqM+H}{3}\right) = 1 = \frac{J_c q}{3} \Longrightarrow \frac{q}{3} = J_c^{-1} = T_c$$

β Üsteli:

$$M = \frac{JqM+H}{3} \Longrightarrow M \sim (J-J_c)^{-\frac{1}{2}} \Longrightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

δ Üsteli:

$$M \sim H^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \delta = 3$$

γ Üsteli:

$$\frac{\partial M}{\partial H} = \frac{\partial}{\partial H}\left[\frac{A}{3} - \frac{A^3}{45}\right] \sim \left(\frac{T-T_c}{T_c}\right)^{-1} \Rightarrow \gamma = 1$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} \ln p_i \equiv \ln A + B s_i \\ p_i \equiv A e^{B s_i} \end{array}\right\} \text{tanımlamalarını yaparsak}$$

$$\int p(\Omega) d\Omega = \int_0^{2\pi} A e^{B\cos\theta} d\theta = 2\pi \int_{-1}^{+1} A e^{B\Omega} d\Omega = \frac{4\pi A}{B}\sinh(B) = 1 \Rightarrow A = \frac{B}{4\pi \sinh(B)}$$

$$\int \Omega p(\Omega) d\Omega = \int_0^{2\pi} \cos\theta A e^{B\cos\theta} d\theta = 2\pi A \int_{-1}^{+1} \Omega e^{B\Omega} d\Omega \xrightarrow[\text{A'yı B cinsinden yazma}]{\text{integration by parts}} \boxed{\coth(B) - \frac{1}{B} = M \simeq \frac{B}{3}}$$

$$-\beta\Psi = -\underbrace{\beta \,\mathrm{Tr}\, \rho \mathcal{H}}_{①} - \underbrace{\mathrm{Tr}\,\rho \ln \rho}_{②}$$

$$① = \int_0^{2\pi} A e^{B\cos\theta_i'} \left[\cos\theta_i (JqM + H)\right] d\theta_i' = 2\pi \int_{-1}^{+1} A e^{B\Omega} \Omega (JqM+H) d\Omega$$

$$= 2\pi A (JqM+H) \int_{-1}^{+1} \Omega e^{B\Omega} d\Omega \xrightarrow[\text{A'yı B cinsinden yazma}]{\text{integration by parts}} (JqM+H)\left[\coth(B) - \frac{1}{B}\right]$$

$$② = \int_0^{2\pi} A e^{B\cos\theta} (\ln A + B\cos\theta) d\theta = 2\pi \int_{-1}^{+1} A e^{B\Omega} (\ln A + \Omega) d\Omega = \coth(B) - \frac{1}{B} + \ln A$$

$$-\beta\Psi = (JqM + H - 1)\left[\coth(B) - \frac{1}{B}\right] - \ln A$$

$$\Downarrow$$

$$\Psi = -kT\left[JqM^2 + (H-1)M - \ln\left(\frac{3M}{4\pi\sinh(3M)}\right)\right]$$

c) Böylelikle en genel durumda;

$$p(\theta) = \ln\left(\frac{3M}{4\pi\sinh(3M)}\right)e^{3M\cos\theta} \quad , \quad A = \ln\left(\frac{3M}{4\pi\sinh(3M)}\right)\Big]$$